

Correction des deu m5 - TS1

Ex 1: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(14)

1) * sur $] -\infty; 2[$ et sur $] 2; +\infty[$, f est continue comme fonctions de référence continues

* en 2? $f(2) = 2^2 - 4 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 = f(2)$$

Par définition f est continue en 2

* Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

(15)

2) * sur $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$, f est dérivable comme fonctions de référence dérivables

* en 2?

pour $x \leq 2$: $T(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} T(x) = 4$$

pour $x > 2$: $T(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Par composition et quand $\lim_{x \rightarrow 2^+} T(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} T(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} T(x)$ donc f n'est pas dérivable en 2.

* alors f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex 2: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5} \end{cases} (n \in \mathbb{N}) ; f(x) = \frac{x^2}{5} \text{ sur } \mathbb{R}$

15,5

1) $f(x) = \frac{2x}{5}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

1

② $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} = x \Leftrightarrow x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$
 $\Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$S = \{0, 5\}$

9,5

2) on veut montrer que $u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

initialisation: pour $n=0$

$u_0 = 4$ et $u_1 = \frac{u_0^2}{5} = \frac{16}{5} = 3,25$ on a bien $u_1 \leq u_0$
 vrai au rang $n=0$

hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_{n+1} \leq u_n$

$u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5}$ donc $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

f strictement croissante sur $[0, +\infty[$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ vrai au rang $n+1$

conclusion: c'est vrai pour $n=0$ et c'est héréditaire
 donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) on vient de montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0, par théorème (u_n) converge

soit l sa limite,

f continue sur $\mathbb{R}$

$u_{n+1} = f(u_n)$

d'après le théorème du point fixe, l vérifie

$l = f(l)$

donc $l = 0$ ou $l = 5$

or $u_0 = 4$ donc $l \leq 4$ alors $l = 0$

Ex 3: Partie A: $g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$

1) En $+\infty$, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
en $-\infty$

$$g(x) = x^2(-4x - 3) - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x - 3) = +\infty$$

Par produit et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x + 1)$

x	$-\infty$	$-1/2$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$		-2		$-\infty$

du signe de $a = -12$
 à l'extérieur des racines

$$g(-1/2)$$

$$g(-1/2) = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{4}{8} - \frac{3}{4} - 2 = -\frac{9}{4}$$

3) Sur $[-1/2; +\infty[$, -2 est le maximum pour g
 atteint en $x = 0$ donc $g(x) \leq 0$

• sur $]-\infty; -1/2]$, g continue (polynôme)

- g strictement décroissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } g(-1/2) = -5/4$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs
 intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet
 une seule solution α sur $]-\infty; -1/2]$

• Au Total, une seule solution sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha \leq -1/2$

d'après la calculatrice

$$g(-1,14) > 0 \text{ donc } -1,14 < \alpha < -1,13$$

$$g(-1,13) < 0 \text{ et } \alpha \geq -1,13 \text{ par excès}$$

4) D'après la question précédente

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

Partie B: $f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1) $f(x) = \frac{x(2 + 1/x)}{x^3(1 - 1/x^3)} = \frac{1}{x^2} \times \frac{2 + 1/x}{1 - 1/x^3}$ sur $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + 1/x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 1/x^3) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^2 &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \text{et produit} \\ \text{de m\^eme} \end{array} \right. \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

2' axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathbb{R}$ en $\pm \infty$ 9.5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3-1) &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3-1) &= 0^- \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \end{array} \right. \quad \begin{aligned} &0,75 \\ &+9,25 \end{aligned}$$

($x \mapsto x^3$ st π sur $\mathbb{R}$) La droite d'equation $x=1$ est asymptote verticale à $\mathbb{R}$

2) @ $f'(x) = \frac{2(x^3-1) - (2x+1) \times 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{2x^3 - 2 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3-1)^2}$

9.75 $= \frac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3-1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$

(b) $(x^3-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ 9.25

alors

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow f(0)$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 0$

9.75

Ex 4 : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}$ sur $\mathbb{R}$

175

Partie A: 1) $T: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

2) f semble convexe sur $]-\infty; 0]$ puis concave sur $[0; +\infty[$.

Partie B: 1) $f'(x) = -\frac{-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$

2) $\frac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x) = -\infty$
 $X = -3x \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$
 Par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$
 Par somme et quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$
 $X = -3x \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$
 Par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$
 Par somme et quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

4) $f(x) = 999 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-3x}} = 999$

$\Leftrightarrow 1 = 999(1+e^{-3x})$

$\Leftrightarrow 1 = 999 + 999e^{-3x}$

$\Leftrightarrow 999 = 999e^{-3x}$

$\Leftrightarrow e^{-3x} = \frac{1}{999} \Leftrightarrow e^{3x} = 999$

$\Leftrightarrow 3x = \ln(999)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ln(999)$

$S = \left\{ \frac{1}{3} \ln(999) \right\}$

Partie C: 1) T: $y = f'(0)x + (x-0) + f(0)$

$$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{3}{(1+1)^2} = \frac{3}{4} \text{ donc } T: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

0.5

$$2) f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}$$

$$9e^{-3x} > 0 \text{ et } (1 + e^{-3x})^3 > 0$$

donc $f''(x)$ est du signe de $(e^{-3x} - 1)$

$$e^{-3x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-3x} \geq 1 \Leftrightarrow -3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

car $x \mapsto e^x$
strictement croissante
sur $\mathbb{R}$

donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

1

3) a) $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0]$ donc f est convexe

0.5

b) $f''(0) = 0$ en changeant de signe avant et après
donc $A(0; \frac{1}{2})$ est le point d'inflexion pour f

0.5

c) • quand f est convexe, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de
ses tangentes donc au-dessus de T sur $]-\infty; 0]$

• quand f est concave, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de
ses tangentes donc au-dessous de T sur $[0; +\infty[$.

0.5