

Devoir n°5 - Continuité - TVI - TSpé

27 novembre 2023 - 2h

Exercice 1 (4 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (5 pts) : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5} \end{cases} \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

Et soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{5}$.

1. a) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (6,5 pts) :

Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α .
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} .
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser les asymptotes (s'il y a lieu).
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3-1)^2}$.
b) Dresser le tableau de variations de f .

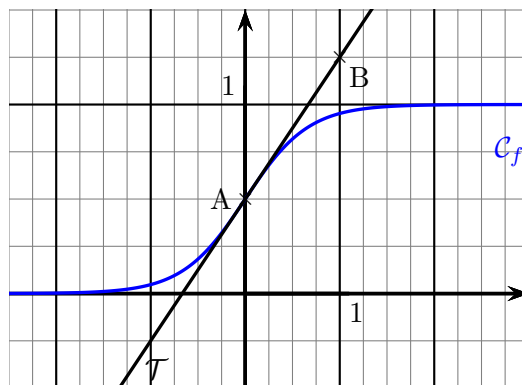
Exercice 4 (7,5 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A , le point de coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$,

et B le point de coordonnées $\left(1 ; \frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : Etude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f' .
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .
b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f .
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f .

On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Justifier la réponse.

Exercice 5 (Bonus) : Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = e^x - kx$$

où k est un réel quelconque.

Existe-t-il un réel k tel que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}_k$, la courbe représentative de la fonction f_k ?

Si oui, déterminer k ainsi que les coordonnées du point de tangence.