

Devoir n°4bis - Suites et Limites de Fonctions - TS

11 novembre 2023 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$$f_1(x) = \frac{2 - 7x + 3x^2}{x^2 + 3x - 4}; \text{ en } +\infty$$

$$f_2(x) = \frac{x - 3\cos(x)}{x}; \text{ en } -\infty$$

Exercice 2 (15 pts) : Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1 : Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

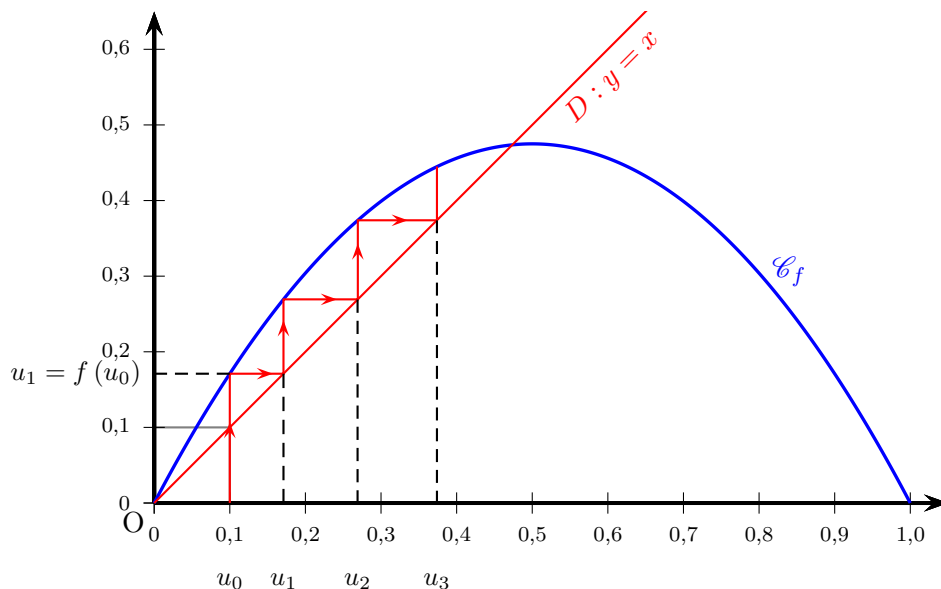
On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

- Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
- En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

2. Ci-contre sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

- En déduire que la suite (u_n) converge.
- Déterminer sa limite.

Partie 2 : Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo (p)` où p désigne un entier naturel non nul.

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p):
        u = 1/2*u*(1 - u)
        n = n+1
    return(n)
```