

Ex 1: $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 2x) = 0$

Par coïncidence
comp. avec

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \ln(x) = 0$

Par somme
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

b) $f(x) = x^2 (5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x))$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty$

Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + \frac{2}{x} - 2 \ln(x)) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2) $f'(x) = 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x^2 \times \frac{1}{x}$
 $= 10x + 2 - 4x \ln(x) - 2x$
 $= 8x + 2 - 4x \ln(x)$

3) a) $f''(x) = 8 - 4 \ln(x) - 4x \times \frac{1}{x} = 4 - 4 \ln(x) = 4(1 - \ln(x))$

b) du signe de $1 - \ln(x)$

$1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e \geq x$ car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc

x	0	e	$+\infty$
$f''(x)$		+	0 -

$f''(x) \geq 0$ sur $]0; e]$ donc f est convexe sur $]0; e]$
 et e_p est au-dessus de ses tangentes

c) alors

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		$4e+2$	-

$f'(e) = 8e + 2 - 4e \ln(e)$
 $= 8e + 2 - 4e$
 $= 4e + 2$

4) a) sur $]0; e]$, f' est strictement croissante
 avec $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2$ donc $f'(x) > 2 > 0$

sur $[e; +\infty[$, f' est continue (car dérivable)
 f' est strictement décroissante
 $f'(e) = 4e + 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$
 (> 0)

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[e; +\infty[$

En total, une seule solution sur $]0; +\infty[$

D'après la calculatrice,

$f'(7,87) > 0$ et $f'(7,88) < 0$ donc $7,87 < \alpha < 7,88$

b) on a donc

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

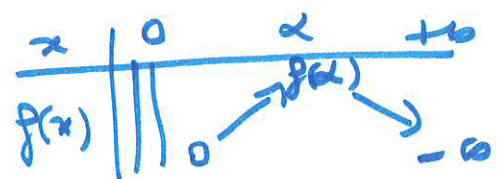
5) a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x + 2 - 4x \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow 4x \ln(x) = 8x + 2$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{8x + 2}{4x} = \frac{4x + 1}{2x}$

Alors $f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x)$
 $= 5x^2 + 2x - 2x^2 \times \left(\frac{4x + 1}{2x}\right)$
 $= 5x^2 + 2x - x(4x + 1)$
 $= x^2 + x$

b) d'après la question 4) b) on a :



$f(x)$ est bien le maximum de f sur $]0; +\infty[$

$7,87 < \alpha < 7,88$ donc $69,8 < f(\alpha) < 70,0$

$\approx 0,2$ pts

Ex 2: 1) $f(x) = \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$
 $f(x) = 2023 \Leftrightarrow 1+x^2 = e^{2023} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e^{2023} - 1}$
 l'équation admet 2 solutions (C)

2) $g(x) = x \ln x - x^2$ sur $]0; +\infty[$

$g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2x = \ln x + 1 - 2x$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$ du signe de $(1-2x)$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

$g''(\frac{1}{2}) = 0$ en Perseant
 de signe avant et après

donc g admet un seul
 point d'inflexion au point
 d'abscisse $\frac{1}{2}$

(C)

3) $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ sur $] -1; 1[$

$g = -\frac{1}{2} \ln u \quad g' = -\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$

donc $g'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = f(x)$ (d)

4) $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie pour $-x^2 - x + 6 > 0$

$\Delta = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-1+5}{-2} = -3$

$x_2 = \frac{-1-5}{-2} = 2$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$-x^2 - x + 6$	-	0	+	0 -
D_f			$] -3; 2[$	

(b)

5) $g(x) = x^2 - 4x + 3 \ln(2x-1)$ sur $]1; +\infty[$

$g'(x) = 2x - 4 + 3 \times \frac{2}{2x-1} = 2x - 4 + \frac{6}{2x-1}$

$g'(1) = -2 + 6 = 4$ coefficient directeur de la tangente

g au point d'abscisse 1 donc $y = 4x - 7$ (a)

6) $\ln(x+3) < 2 \ln(x+1)$

$x+3 > 0$ et $x+1 > 0$

donc $x > -3$ et $x > -1$

$D =] -1; +\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(x+3) < \ln(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+3 < (x+1)^2$

$\Leftrightarrow x+3 < x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow 0 < x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)(x+2)$

x	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	-	0	+	
S			$] 1; +\infty[$	

$S =] 1; +\infty[$