Devoir n^{o}6 - Ln - TSpé

14 décembre 2023 - 1h15

Exercice 1 (12 pts) : On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
   $$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$
   b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
5. a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que : $\ln(\alpha) = \dfrac{4\alpha + 1}{2\alpha}$.
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Exercice 2 (8 pts) : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.*
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée.

1. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$.
   Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 2\,023$

   a. n'admet aucune solution. **b.** admet exactement une solution.
   c. admet exactement deux solutions. **d.** admet une infinité de solutions.

2. Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par : $g(x) = x\ln(x) - x^2$.
   On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

   a. La fonction g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$. **b.** La fonction g est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.
   c. $\mathcal{C}_g$ admet un seul point d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$. **d.** $\mathcal{C}_g$ admet deux points d'inflexion sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,1[$ par

   $$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

   La fonction f est dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

   a. $g(x) = \dfrac{x^2}{2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$

   c. $g(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(1-x^2\right)$ **d.** $g(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$

4. La fonction $x \longmapsto \ln\left(-x^2-x+6\right)$ est définie sur

   a. $]-\infty\,;\,6]$ **b.** $]-3\,;\,2[$ **c.** $]0\,;\,+\infty[$ **d.** $]2\,;\,+\infty[$

5. On considère la fonction f définie sur $]0,5\,;\,+\infty[$ par

   $$f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$$

   Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

   a. $y = 4x - 7$ **b.** $y = 2x - 4$
   c. $y = -3(x-1) + 4$ **d.** $y = 2x - 1$

6. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

   a. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$ **b.** $S =]1\,;\,+\infty[$
   c. $S = \emptyset$ **d.** $S =]-1\,;\,1[$