

Ex 1: Partie I:

(18)

- 1) le coefficient directeur de la courbe en 0 est $f'(0)$,
on lit $f'(0) = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 0,5
- 2) f' est décroissante sur $] -\infty; -2] \cup [1; +\infty [$ et
@ f' est croissante sur $] -2; 1 [$ 0,5
- ③ f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante
donc sur $[-2; 1]$ 0,5

Partie II: $f(x) = \ln(x^2 + x + 5/2)$ sur $\mathbb{R}$

- 1) Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 5/2) = +\infty$
on pose $x = x^2 + x + 5/2$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ } Par Composition
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$x^2 + x + 5/2 = x(x+1) + 5/2$$

Par produit et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) + 5/2 = +\infty$

donc, de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

1,5

2) $f = \ln u$ $f' = \frac{u'}{u}$ $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5/2}$

0,5

- 3) $x^2 + x + 5/2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$
 $f'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ 0,5

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln(9/4)$	$+\infty$

$$f(-1/2) = \ln(9/4) = 0,8$$

0,5

4) Sur $[-1/2; +\infty[$

- @ f continue (car dérivable)
• f strictement croissante
• $f(-1/2) = \ln(9/4) (< 2)$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α sur $[-1/2; +\infty[$

1,25

b) d'après la calculatrice

$$\begin{cases} f(1,76) < 2 \\ f(1,77) > 2 \end{cases}$$

donc $1,76 < \alpha < 1,77$
et $\alpha \approx 1,8$

0,5

$$5) f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + x + 5/2)^2}$$

sur IR

$$(x^2 + x + 5/2)^2 > 0 \text{ donc}$$

$$\Delta = 36 \quad x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 1$$

$$(a = -2)$$

$f''(x)$ est du signe de $N(x) = -2x^2 - 2x + 4$

x	-∞	-2	1	+∞
$f''(x)$	-	0	+	0

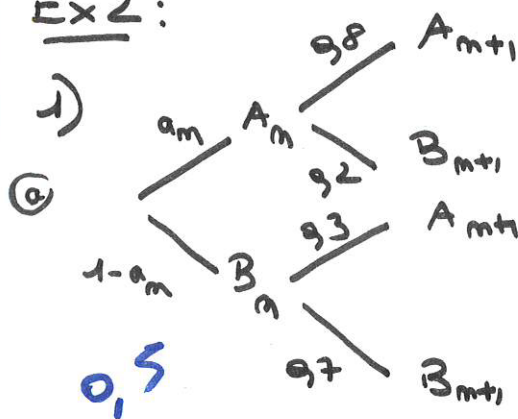
1,5

du signe de a à l'extérieur des racines

$f''(-2) = f''(1) = 0$ et f'' change de signe.

donc la courbe de f admet 2 points d'inflexion
en $x = -2$ et en $x = 1$

Ex 2:



b) $a_{m+1} = P(A_{m+1})$

d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= P(A_m \cap A_{m+1}) + P(B_m \cap A_{m+1}) \\ &= P(A_m) P_{A_m}(A_{m+1}) + P(B_m) P_{B_m}(A_{m+1}) \\ &= a_m \times 0,8 + (1 - a_m) \times 0,3 \\ &= \underline{0,5 a_m + 0,3} \end{aligned}$$

1,25

1,9

$$\begin{cases} a_1 = a \quad (a \in [0; 1]) \\ a_{m+1} = 0,5 a_m + 0,3 \quad (m \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

2) $a = 0,5$ @ on veut montrer que $0 \leq a_m \leq 0,6$ pour $m \in \mathbb{N}^*$

• initialisation: pour $m = 1$

$$a_1 = a = 0,5 \text{ et } 0 \leq 0,5 \leq 0,6 \text{ vrai pour } m = 1$$

2

• hérédité: soit $m \in \mathbb{N}^*$, je suppose que $0 \leq a_m \leq 0,6$

$$0 \leq a_m \leq 0,6$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 0,5 a_m \leq 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0,3 \leq 0,5 a_m + 0,3 \leq 0,6$$

$$\text{Donc } 0 \leq a_{m+1} \leq 0,6$$

• conclusion:

par principe de récurrence

$$\underline{0 \leq a_m \leq 0,6 \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*}$$

$$b) a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$$

$$0 \leq a_n \leq 0,6$$

$$\Rightarrow 0 \geq -0,5a_n \geq -0,3$$

$$\Rightarrow 0,3 \geq -0,5a_n + 0,3 \geq 0$$

$$\text{Donc } a_{n+1} - a_n \geq 0$$

(a_n) est croissante

c) (a_n) est croissante et majorée par 0,6
par théorème elle converge (vers l)

0,5

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

par produit et somme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5l + 0,3$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = l$$

La limite est unique
donc $l = 0,5l + 0,3$

$$\Leftrightarrow 0,5l = 0,3 \Leftrightarrow l = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$3) \underline{u_n = a_n - 0,6} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a) u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$$

$$= 0,5a_n + 0,3 - 0,6$$

$$= 0,5a_n - 0,3$$

$$= 0,5(u_n + 0,6) - 0,3$$

$$= 0,5u_n$$

$$u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$$

(u_n) suite géométrique
de raison 0,5 de

$$\text{ta terme } u_1 = a - 0,6$$

0,25

$$b) \text{ donc } u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$$

$$\text{et } \underline{a_n = u_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$c) -1 < 0,5 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$$

0,75

par produit et somme $\lim a_n = 0,6$ indépen-
dent de a

d) La probabilité de jouer au jeu de type A
tend vers 0,6 et donc celle de jouer au
jeu B tend vers 0,4. Si l'on veut que
ce soit plus équilibré, il faudrait
diffuser plus de publicité au jeu B.

0,5

Ex 3: $g(t) = \frac{1}{1 + k e^{-at}}$ sur $[0; +\infty[$ ($k, a > 0$ (t années))

15,5

1) $g(0) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{1+k} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = 7$

or $g(10) = \frac{64}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{1+7e^{-10a}} = \frac{64}{100} \Leftrightarrow 1+7e^{-10a} = \frac{100}{64}$

$\Leftrightarrow 7e^{-10a} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow e^{-10a} = \frac{9}{112}$

$\Leftrightarrow -10a = \ln(9/112)$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{10} \ln(112/9)$ ($a \approx 0,25$)

2) $g(t) = \frac{1}{1+7e^{-0,25t}}$ @ $g'(t) = \frac{-7 \times (-0,25) e^{-0,25t}}{(1+7e^{-0,25t})^2}$
 $= \frac{1,75 e^{-0,25t}}{(1+7e^{-0,25t})^2}$

$g'(t) > 0$
 donc g strictement
 croissante sur $[0; +\infty[$ or

⑥ $g(t) > 0,99 \Leftrightarrow \frac{1}{1+7e^{-0,25t}} > \frac{99}{100} \Leftrightarrow 1+7e^{-0,25t} < \frac{100}{99}$
 $\Leftrightarrow 7e^{-0,25t} < \frac{1}{99} \Leftrightarrow e^{-0,25t} < \frac{1}{693}$

2) $\ln$
 strictement
 croissante sur
 $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-0,25t}) < \ln(1/693)$

$\Leftrightarrow -0,25t < -\ln(693)$

$\Leftrightarrow t > \frac{1}{0,25} \ln(693)$

$\Leftrightarrow t > 4 \ln(693)$
 ($\approx 26,2$)

Au bout de
27 ans, la
 proportion
 sera supérieure
 à 99%

(ou $\lim g(t) \dots$)

3) @ $g(48) = \frac{1}{1+7e^{-12}} \approx 0,9278$ Au 1er janvier 2018
 la proportion sera de 92,78%
 environ.

⑥ $f = \frac{880}{1000} = 0,88$ soit en réalité 88% des
 foyers sont équipés en 2018

La modélisation doit être remise en cause