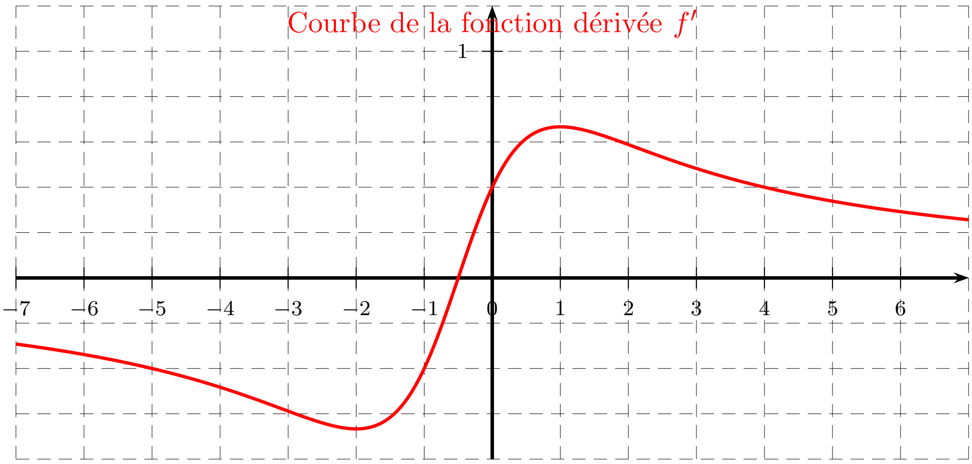
Devoir n°8 - Fonctions - Suites - Probabilités - TSpé

29 janvier 2024 - 2h

Exercice 1 (Métropole juin 2021 - 7,5 pts) :

Partie I : Lectures graphiques : f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : Etude de fonction : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

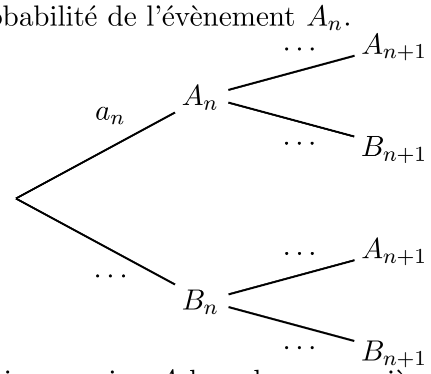
$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$$

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 2 (Métropole juin 2019 - 8,5 pts) : Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :
— si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;
— si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : "la n-ième partie est une partie de type A."
B_n : "la n-ième partie est une partie de type B."

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.



1. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre.

   b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. La suite (a_n) est donc définie par :
$a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.
   b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
   d) La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 3 (Métropole sept 2018 - 5 pts) : Une étude statistique a été menée dans une grande ville de France entre le 1er janvier 2000 et le 1er janvier 2010 afin d'évaluer la proportion des ménages possédant une connexion internet fixe. Au 1er janvier 2000, un ménage sur huit était équipé d'une connexion internet fixe et, au 1er janvier 2010, 64 % des ménages l'étaient.
Suite à cette étude, cette proportion a été modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$g(t) = \frac{1}{1 + k\mathrm{e}^{-at}}$$
où k et a sont deux constantes réelles positives et la variable t désigne le temps, compté en années, écoulé depuis le 1er janvier 2000.

1. Déterminer les valeurs exactes de k et de a pour que $g(0) = \dfrac{1}{8}$ et $g(10) = \dfrac{64}{100}$.
2. Dans la suite, on prendra $k = 7$ et $a = 0,25$. La fonction g est donc définie par :
$$g(t) = \frac{1}{1 + 7\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{4}\right)}}.$$
   a) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Selon cette modélisation, peut-on affirmer qu'un jour, au moins 99 % des ménages de cette ville seront équipés d'une connexion internet fixe ? Justifier la réponse.
3. a) Donner, au centième près, la proportion de foyers, prévue par le modèle, équipés d'une connexion internet fixe au 1er janvier 2018.
   b) Compte tenu du développement de la téléphonie mobile, certains statisticiens pensent que la modélisation par la fonction g de l'évolution de la proportion de ménages possédant une connexion internet fixe doit être remise en cause.
   Au début de l'année 2018 un sondage a été effectué. Sur 1 000 foyers, 880 étaient équipés d'une connexion fixe. Ce sondage donne-t-il raison à ces statisticiens sceptiques ?