

Devoir n°9 - Espace - TSpé

8 février 2024 - 45 min

Exercice 1 (Antilles sept 2020 - 10 pts) : Dans le cube $ABCDEFGH$ reproduit ci-dessous, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points H , M et N .
2. a) Justifier que les droites (CD) et (MN) sont sécantes.
b) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN) .

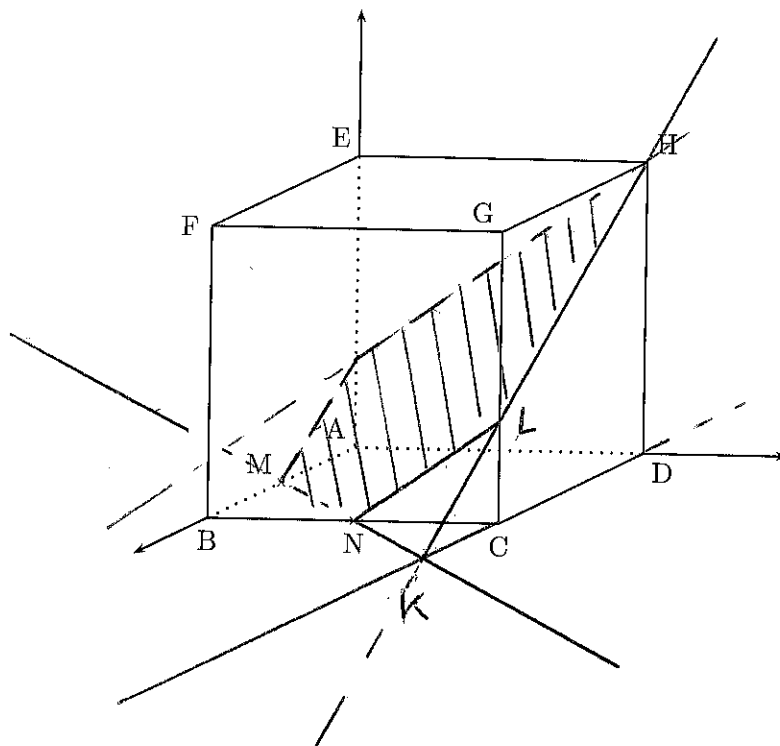
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- c) Déterminer les coordonnées du point K , le point d'intersection des droites (CD) et (MN) .
3. Justifier que les points H , M , N définissent un plan.
4. Déterminer l'angle $\widehat{HMN}$ à $0,1^\circ$ près.
5. On admet que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.
a) Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN) .
c) En déduire les coordonnées du point L .

Le Devoir se termine ici !

6. Construire les points K et L puis la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (HMN) .



Question du dev m 9 - TSfe

Ex 1: Dans le repère $(I; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

9,25

$A(0;0;0)$
 $B(1;0;0)$
 $C(1,1;0)$
 $M(\frac{1}{2};0;0)$
 $N(1;\frac{1}{2};0)$
 $H(0;1;1)$
 $K(\frac{3}{2};1;0)$
 $L(-1;1;\frac{1}{3})$

9,5

1) $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ milieu de } [AB]: M(\frac{1}{2};0;0) \\ N \text{ milieu de } [BC]: N(1;\frac{1}{2};0) \\ H(0,1,1) \end{array} \right.$

9,31

2) a) (MN) et (CD) sont incluses dans le plan (ABC) ; elles ne sont pas parallèles donc sécantes.

0,5

b) $\vec{MN} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(MN) : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1/2 \\ y = \frac{1}{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$ et $M \in (MN)$

$(t' \in \mathbb{R})$

c) ou $(CD): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

1

Donc $K(x;y;z)$ vérifie $\begin{cases} t = \frac{1}{2}t' + 1/2 \\ 1 = \frac{1}{2}t' \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t = 3/2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

K intersection de (CD) et (MN) a pour coordonnées

1

$K(\frac{3}{2};1;0)$

3) $\vec{MN} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{MH} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1

1

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles

donc $\vec{MN}$ et $\vec{MH}$ non colinéaires alors M, N, H non alignés et définissent un plan

4) $\vec{MN} \cdot \vec{MH} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} MN^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ MH^2 = \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4} \end{cases}$

ou $\vec{MN}, \vec{MH} = MN \times MH \times \cos(\widehat{HMN})$

2,5

$= \sqrt{\frac{2}{4}} \times \sqrt{\frac{9}{4}} \times \cos(\widehat{HMN})$

2,5

$= \frac{\sqrt{18}}{4} \cos(\widehat{HMN}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos(\widehat{HMN})$

donc $\frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos(\widehat{HMN}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{HMN}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$
 J'après la calculatrice $\widehat{HMN} \approx 76,4^\circ$

5) @ $\vec{m} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{MN} = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 0 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{MH} = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 0 \end{cases}$

donc $\vec{m} \perp \vec{MN}$ et $\vec{m} \perp \vec{MH}$ (deux vecteurs
 directeurs du plan (HMN))

donc $\vec{m}$ normal au plan (H.M.N)

⑥ alors (HMN) : $2x - 2y + 3z + d = 0$

or $M \in (HMN) \Leftrightarrow 1 - 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Donc une équation cartésienne de (HMN)
 est $2x - 2y + 3z - 1 = 0$

⑦ $L(x; y; z)$ vérifie $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = k \end{cases}$ et $2x - 2y + 3z - 1 = 0$
 $\vec{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (CG) :

$2 \times 1 - 2 \times 1 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

donc L intersection de (CG) et (HMN)

a pour coordonnées $L(1; 1; \frac{1}{3})$