Devoir n°10 - Trigonométrie - TSpé

16 avril 2026 - 50 min

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a) Déterminer f', la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0\ ;\ \pi]$, $f''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos(x)$.
   c) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
   d) En déduire que pour tout réel $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad \mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.
   e) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

PARTIE B : On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$$

2. En déduire les valeurs exactes de I et J.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur $[0\ ;\ \pi]$.
   Calculer la valeur exacte, puis une valeur arrondie au centième, de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

