Devoir n°1 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

22 septembre 2025 - 30 min

Exercice 1 (4 pts) : Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = 2xe^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f_2(x) = \dfrac{3e^x - 2}{1 + 2e^x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3(x) = 3x^2\sqrt{2x-1}$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$f_4(x) = \dfrac{1}{(4x^2+5)^3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 (6 pts) : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3n - 7$ pour tout entier naturel n.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$$

Ex 1 : $f_1(x) = 2x\,e^{1/x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f = uv \quad f' = u'v + uv'$

$f_1'(x) = 2e^{1/x} + 2x\,e^{1/x} \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2e^{1/x} - \frac{2}{x}e^{1/x} = \underline{2e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$

$f_2(x) = \dfrac{3e^x - 2}{1 + 2e^x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad f = \frac{u}{v} \quad f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$f_2'(x) = \dfrac{3e^x(1+2e^x) - (3e^x - 2) \times 2e^x}{(1+2e^x)^2} = \dfrac{3e^x + 6e^{2x} - 6e^{2x} + 4e^x}{(1+2e^x)^2} = \dfrac{7e^x}{(1+2e^x)^2}$

$f_3(x) = 3x^2\sqrt{2x-1}$ sur $]1/2; +\infty[$

$f_3'(x) = 6x\sqrt{2x-1} + 3x^2 \times \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = 6x\sqrt{2x-1} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x-1}}$

$f_3'(x) = \dfrac{6x(2x-1) + 3x^2}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{15x^2 - 6x}{\sqrt{2x-1}} = \dfrac{3x(5x-2)}{\sqrt{2x-1}}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{(4x^2+5)^3} = (4x^2+5)^{-3}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad (u^n)' = n u^{n-1} \times u'$

$f_4'(x) = -3(4x^2+5)^{-4} \times 8x = \dfrac{-24x}{(4x^2+5)^4}$

Ex2 : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 7 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

On veut montrer que $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$ pour $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$
  $u_0 = 0$ et $\frac{3}{2} \times 0^2 - \frac{17}{2} \times 0 = 0$ (P) est vérifié

- hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose que
  $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$
  Je veux montrer que $u_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 - \frac{17}{2}(n+1)$

$u_{n+1} = u_n + 3n - 7$

$\overset{H.R}{=} \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n + 3n - 7$

$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{2}n - 7$

or $\frac{3}{2}(n+1)^2 - \frac{17}{2}(n+1)$

$= \frac{3}{2}(n^2 + 2n + 1) - \frac{17}{2}n - \frac{17}{2}$

$= \frac{3}{2}n^2 + 3n + \frac{3}{2} - \frac{17}{2}n - \frac{17}{2}$

$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{11}{2}n - 7$

donc (P) est vrai au rang $(n+1)$

- conclusion : par principe de récurrence on a $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.