Devoir n°4 - Continuité - Dérivabilité - TVI - TSpé maths

20 novembre 2025 - 2h

Exercice 1 (4,5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (7,5 pts) :

Partie A : On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}.$$

3. En déduire que sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution : $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1  from math import *
2  def seuil(n):
3      u=5
4      i=0
5      ℓ =(1 + sqrt(5))/2
6      while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
7          u=sqrt(u+1)
8          i=i+1
9      return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (9 pts) : On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation complet de g.
3. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$; déterminer un encadrement de α à 10^{-2}.

Partie C

1. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Exercice 4 (Bonus) : Soit x un réel. On note $\mathrm{E}(x) = n$, sa partie entière, c'est-à-dire n est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

1. Montrer que pour pout réel x, on a : $x - 1 \leq \mathrm{E}(x) \leq x$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(x)$.
3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} x\mathrm{E}(\frac{1}{x})$.